Edice LIDOVÁ MATEMATIKA

Lineární rovnice

a jejich soustavy

Řada druhého ročníku SŠ

Jiří Reichel

2021

Lineární rovnice

Lineární rovnice by každý středoškolák měl znát už ze základní školy, ale pro úplnost se na ně podíváme. Lineární rovnice je taková rovnice, kde neznámá po běžných algebraických úpravách nemá větší exponent než 1 a zpravidle je myšleno, že neobsahuje ani žádné speciální funkce. Předvedeme řešení prakticky na řadě příkladů.

Příklad 01:

$x + 1 = 3x - 5$	$\mid -3x$	*Přesouváme všechny neznámé vlevo.*
$-2x + 1 = -5$	$\mid -1$	*Přesouváme konstanty vpravo.*
$-2x = -6$	$\mid :(-2)$	*Dělíme celou rovnici počtem **x**.*

$x = 3$

Toto sice byla velmi jednoduchá rovnice, ale tento princip používáme obecně. Zkusíme trochu těžší příklad:

Příklad 02:

$6x + 8 = 2x - 1$	$\mid -2x$
$4x + 8 = -1$	$\mid -8$
$4x = -9$	$\mid :4$

$x = -2{,}25$

V lineární rovnici mohou být i zlomky:

Příklad 03:

$\frac{x+3}{2} = 5$	$\mid .2$	*Násobíme jmenovatelem všechny členy rovnice.*
$x + 3 = 10$	$\mid -3$	

$x = 7$

Zlomků může být v rovnici i více:

Příklad 04:

$\frac{2x-3}{5} + 6 = \frac{4x+3}{3} - 4$	$\mid .15$	*Násobíme celou rovnici společným jmenovatelem.*
$3.(2x - 3) + 15.6 = 5.(4x + 3) - 15.4$	$\mid$	*Roznásobíme závorky.*
$6x - 9 + 90 = 20x + 15 - 60$	$\mid$	*Sečteme jednotlivé strany rovnice.*
$6x + 81 = 20x - 45$	$\mid -20x$	*Přesouváme neznámé vlevo.*
$-14x + 81 = -45$	$\mid -81$	*Přesouváme konstanty vpravo.*
$-14x = -126$	$\mid :(-14)$	*Dělíme celou rovnici počtem **x**.*

$x = 9$

Další možností je součinový tvar, kdy nám dočasně vzniknou i druhé mocniny. Pokud se dají odečíst, je vše v pořádku, jinak se nejedná o lineární rovnici. V rovnicích tohoto typu často dochází k nečekaným výsledkům.

Příklad 05:

$(x + 3).(x - 2) = (x + 2).(x - 1)$	|	*Roznásobíme závorky.*
$x^2 + 3x - 2x - 6 = x^2 + 2x - x - 2$	|	*Upravíme.*
$x^2 + x - 6 = x^2 + x - 2$	| $-x^2$	*Odečteme od obou stran x^2.*
$x - 6 = x - 2$	| $-x$	*Odečteme od obou stran x.*
$-6 = -2$	|	*Vida, nějaký nesmysl, ale i s tím se dá pracovat.*

$K = \emptyset$

Množina kořenů je prázdná. Rovnice nemá řešení.

Příklad 06:

$(x + 3).(x - 2) = (x + 2).(x - 3)$	|	*Roznásobíme závorky.*
$x^2 + 3x - 2x - 6 = x^2 + 2x - 3x - 6$	|	*Upravíme.*
$x^2 + x - 6 = x^2 - x - 6$	|	*Odečteme od obou stran x^2.*
$x - 6 = -x - 6$	| +x, +6	*Tyto dva kroky lze spojit. Jsme potom rychlejší.*
$2x = 0$	| :2	*Dělíme celou rovnici počtem **x**.*

Nevěřili byste tomu, ale i v této chvíli lidé často výpočet zkazí. Je to tak.

$x = 0$

Podobné příklady:

Příklad 07:

$(x + 6).(x + 2) = (x + 3).(x + 4)$

$x^2 + 8x + 12 = x^2 + 7x + 12$

$8x + 12 = 7x + 12$

$x = 0$

Příklad 08:

$(2x + 3).(3x - 1) = (x + 2).(6x - 1)$

$6x^2 + 7x - 3 = 6x^2 + 11x - 2$

$7x - 3 = 11x - 2$

$-4x = 1$ | :(-4)

$x = -\frac{1}{4} = -0{,}25$

Tyto lineární rovnice můžeme slučovat do soustavy **n** rovnic o **n** neznámých. O tom se více dozvíme v další kapitole.

Soustava n rovnic o n neznámých

Malé n, které je uvedeno v nadpisu kapitoly, je jakékoli přirozené číslo větší než 1. My se v dalším textu omezíme na soustavu 2 rovnic o 2 neznámých a soustavu 3 rovnic o 3 neznámých. Všimněte si, že počet rovnic a počet neznámých je stejný. V případě více rovnic a méně neznámých by často docházelo se stavu, že soustava nemá řešení. V opačném případě by zase těch řešení bylo nekonečno. Samozřejmě není žádná věda počítat i vyšší soustavy, ale pro naše potřeby uvedené dvě stačí.

Problematiku osvětlíme znovu na příkladech.

Soustava 2 rovnic o 2 neznámých

Řeší podobné příklady jako trojčlenka. Začneme soustavou lineárních rovnic v součtovém tvaru (nikde nebude součin xy).

Uvádí se 5 způsobů řešení soustavy rovnic.

1. Sčítací metoda
2. Dosazovací metoda
3. Porovnávací metoda
4. Grafická metoda
5. Metoda kouknu a vidím … moje nejoblíbenější

Sčítací metoda

Při sčítací metodě se snažíme jednu rovnici nebo obě rovnice vynásobit tak, abychom se po jejich sečtení zbavili jedné proměnné. Rovnice budu označovat velkými písmeny **A** a **B**.

Příklad 09:

A: $x + y = 9$

B: $x - 2y = 3$

Vidím dva možné postupy postupy:

V prvním případě se zbavíme proměnné x. Rovnici B vynásobíme (-1).

A: $x + y = 9$

B: $-x + 2y = -3$

A+B: $3y = 6$ | :3

$\underline{\underline{y = 2}}$ | *Dosadíme.*

A: $x + 2 = 9$ | -2 *Izolujeme neznámou.*

$\underline{\underline{x = 7}}$

Můžeme napsat, že výsledkem je uspořádaná dvojice [7;2].

V druhém případě se zbavíme proměnné y. Rovnici A vynásobíme 2.

A: 2x + 2y = 18

B: x – 2y = 3

A+B: 3x = 21 | :3

x = 7 | *Dosadíme.*

A: 7 + y = 9 | -7

y = 2

Můžeme napsat, že výsledkem je uspořádaná dvojice **[7;2]**.

Dosazovací metoda

Dosazovací metoda spočívá v tom, že na základě jedné rovnice jednu proměnnou vyjádříme pomocí druhé (například vyjádříme x pomocí y) a tu proměnnou dosadíme do rovnice druhé.

Příklad 10:

A: x + y = 9

B: x – 2y = 3

Z rovnice B vyjádříme **x** pomocí **y**

B: x = 2y + 3

Dosadíme do rovnice A

A: 2y + 3 + y = 9

3y + 3 = 9 | -3

3y = 6 | :3

y = 2

Dosadíme do rovnice B (upravené)

B: x = 2.2 + 3

x = 7

Můžeme napsat, že výsledkem je uspořádaná dvojice **[7;2]**.

Dosazovací metodou řešíme zpravidla soustavu 3 rovnic o 3 neznámých. Tato metoda má mnohem univerzálnější použití než metoda sčítací. Umí řešit i součin v soustavě rovnic, ale o tom až později.

Porovnávací metoda

Z obou rovnic vyjádříme stejnou proměnnou a z výsledků vytvoříme novou rovnici. Tu vypočteme a výsledek dosadíme do kterékoli původní rovnice.

Příklad 11:

A: $x + y = 9 \quad \rightarrow \quad x = 9 - y$

B: $x - 2y = 3 \quad \rightarrow \quad x = 3 + 2y$

Protože x = x, můžeme napsat

$3 + 2y = 9 - y \qquad |+y -3$

$3y = 6 \qquad |:3$

$\underline{\underline{y = 2}}$

Dosadíme například do vyjádření $x = 9 - y$

$x = 9 - 2$

$\underline{\underline{x = 7}}$

Můžeme napsat, že výsledkem je uspořádaná dvojice **[7;2]**.

Grafická metoda

Obě rovnice vyjádříme jako funkce jedné proměnné, ty zakreslíme do grafu a řešením je jejich průsečík.

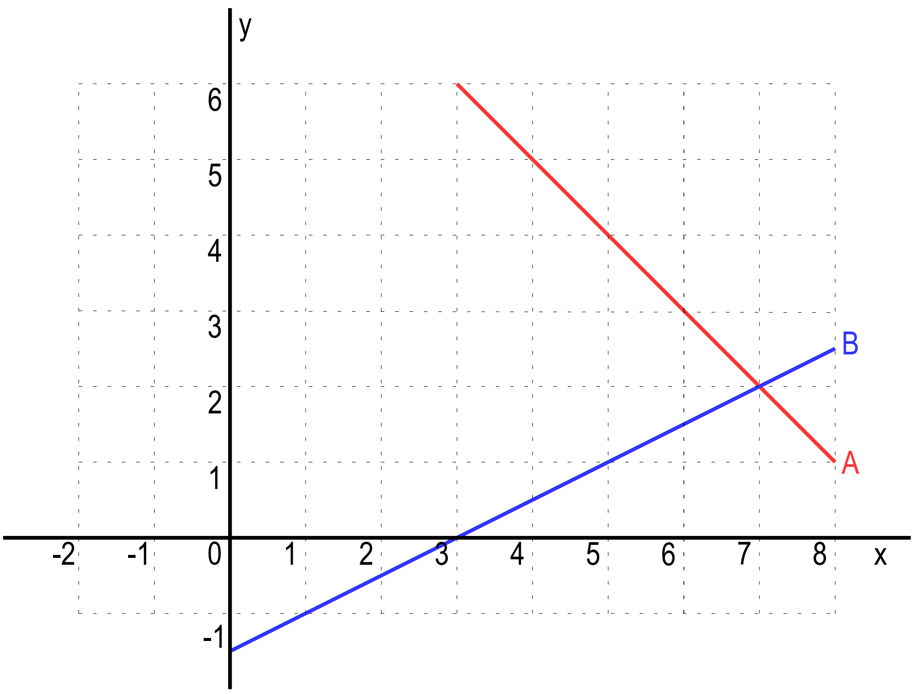
Příklad 12:

A: $x + y = 9$

B: $x - 2y = 3$

A: $y = -x + 9$

B: $y = \frac{1}{2}x - 1{,}5$



Metoda "kouknu a vidím"

Když už jsem ji zmínil, vysvětlím, co je tím myšleno.

Příklad 13:

A: $x + y = 9$

B: $x - 2y = 3$

Vidím, že rovnice A má stejný počet **x** jako B a o 3**y** více. Výsledek se liší o 6. Tím pádem je y = 2. A na **x** z první rovnice zbývá 7. Výsledek je **[7;2]**. Hotovo. Nematematické, ale rychlé a elegantní. V písemce nedoporučuji. Už to číslo příkladu by vás mělo varovat.

A nakonec několik příkladů pro procvičení. Zkuste si je, čeká vás test na stejné téma. Vyzkoušejte různé metody.

Příklad 14:

A: $2x + y = 10$

B: $x - 2y = -5$

Příklad 15:

A: $2x + 3y = 3$

B: $x - 3y = 6$

Příklad 16:

A: $5x + 3y = 19$

B: $3x + 5y = 21$

Příklad 17:

A: $10x - y = 7$

B: $5x - 2y = -1$

Příklad 18:

A: $-4x + 3y = 10$

B: $x - 2y = -15$

Příklad 19:

A: $2x + y = 0$

B: $2x - 2y = 3$

Příklad 20:

A: $3x + 7y = 2$

B: $4x + 9y = 5$

Příklad 21:

A: $2x + y = 10$

B: $6x + 3y = 30$

Příklad 22:

A: $2x + y = 10$

B: $4x + 2y = 15$

Výsledky pro kontrolu:

P14: [3;4], P15: [3;-1], P16: [2;3], P17: [1;3], P18: [5;10], P19: [½;-1], P20: [17;-7], P21: R, P22: Ø

Součin v soustavě rovnic

Taková soustava vznikne například při řešení následující úlohy:

Příklad 23:

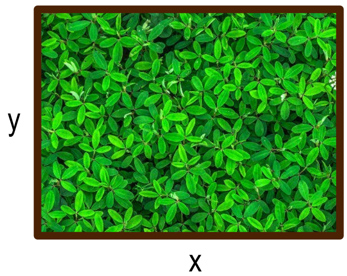
Obdélníková zahrada má plochu (matematicky samozřejmě obsah) 12 arů a délka plotu kolem celé zahrady je 140 metrů.

1) Jaké jsou rozměry zahrady?

2) Jak by se změnily, kdyby se délka plotu zvýšila o 20 metrů?

3) Co by se stalo, kdyby se původní délka plotu zmenšila o 20 metrů?

Pro řešení úloh tohoto typu vždycky doporučuji náčrtek. Kreslená matematika je vždycky názornější. Každý problém graficky zobrazit nemůžeme, ale tam, kde to lze, neváhat a kreslit.



V první řadě je zapotřebí převést všechny rozměry na odpovídající jednotky.

1 ar = 100 m^2

12 arů = 1200 m^2

Obvod obdélníka $O = 2.(x+y)$

Obsah obdélníka $S = x.y$

A můžeme sestavovat rovnice a počítat. V tomto případě používáme metodu dosazovací, neboť funguje univerzálně.

1) $x.y = 1200 \quad \rightarrow \quad y = 1200/x$

$2(x+y) = 140 \quad \rightarrow \quad x + y = 70$ *Dosadíme sem **y** z předchozího řádku.*

$x + 1200/x = 70$ *Po vynásobení **x** vznikne tzv. kvadratická rovnice (viz další návody).*

$x^2 – 70x + 1200 = 0$

$D = (-70)^2 – 4 . 1 . 1200 = 100 \qquad \sqrt{D} = 10$

$x_1 = (70 + 10) : 2 = 40 \rightarrow y_1 = 1200 : 40 = 30$

$x_2 = (70 - 10) : 2 = 30 \rightarrow y_2 = 1200 : 30 = 40$

Výsledky jsou shodné, zahrada má rozměry 30 krát 40 metrů.

2) $x.y = 1200 \rightarrow y = 1200/x$

$2(x+y) = \mathbf{160} \rightarrow x + y = 80$ *Dosadíme sem **y** z předchozího řádku.*

$x + 1200/x = 80$ *Po vynásobení **x** vznikne tzv. kvadratická rovnice (viz další návody).*

$x^2 - 80x + 1200 = 0$

$D = (-80)^2 - 4 . 1 . 1200 = 1600$ $\sqrt{D} = 40$

$x_1 = (80 + 40) : 2 = 60 \rightarrow y_1 = 1200 : 60 = 20$

$x_2 = (80 - 40) : 2 = 20 \rightarrow y_2 = 1200 : 20 = 60$

Výsledky jsou shodné, zahrada má rozměry 20 krát 60 metrů.

3) $x.y = 1200 \rightarrow y = 1200/x$

$2(x+y) = \mathbf{120} \rightarrow x + y = 60$ *Dosadíme sem **y** z předchozího řádku.*

$x + 1200/x = 60$ *Po vynásobení **x** vznikne tzv. kvadratická rovnice (viz další návody).*

$x^2 - 60x + 1200 = 0$

$D = (-60)^2 - 4 . 1 . 1200 = -1200$ Diskriminant je záporný, úloha nemá řešení.

Uvedeným podmínkám nevyhovují žádné rozměry. Tím bych problematiku soustavy dvou rovnic o dvou neznámých uzavřel. A hned se pustíme do tématu o úroveň obtížnějšího.

Soustava 3 rovnic o 3 neznámých

Tato soustava bývá mnohem obtížnější, než soustava dvou rovnic o dvou neznámých. Ukážeme si řešení jedné typické soustavy a jedné slovní úlohy. U těchto soustav používám zpravidla dosazovací metodu (pomalejší, ale odolnější proti chybám), ačkoli jedna moje studentka (ahoj Eliško), počítá tyto soustavy zrychleně pomocí kombinace sčítání a dosazování a zatím velmi úspěšně. Konec povídání, jdeme počítat.

Příklad 24:

A: $2x + 3y - z = 12$

B: $3x - 4y + z = 10$

C: $4x - y - 2z = 3$

Nyní zvolíme (šikovně) jednu proměnnou, kterou vyjádříme pomocí dalších dvou.

V rovnici **A** se nabízí proměnná **z** $\rightarrow z = \mathbf{2x + 3y - 12}$

Rovnice **B** rovněž preferuje proměnnou **z** $\rightarrow z = 4y - 3x + 10$

Z rovnice **C** dostaneme proměnnou **y** $\rightarrow y = 4x - 2z - 3$

Je celkem jedno, kterou možnost vybereme. Mně se líbí volba první, neboť nebude zapotřebí většího násobení. Dosadíme zvolenou proměnnou do ostatních dvou rovnic.

B: $3x - 4y + \mathbf{2x + 3y - 12} = 10$

C: $4x - y - 2.(\mathbf{2x + 3y - 12}) = 3$

Úloha se zjednodušila na soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Rovnice upravíme.

B: $5x - y = 22$

C: $-7y = -21$ | :(-7)

C: $y = 3$ | *Dosadíme do rovnice B.*

B: $5x - 3 = 22$ | + 3

$5x = 25$ | : 5

$x = 5$

A poslední výpočet $z = 2x + 3y - 12 \rightarrow z = 7$

Hledané řešení je tedy **[5;3;7]**.

Druhý, Eliščin způsob řešení:

A: $2x + 3y - z = 12$

B: $3x - 4y + z = 10$

C: $4x - y - 2z = 3$

A budeme násobit, sčítat, odečítat a následně dosazovat. Odstraníme z rovnic proměnnou **z**.

A + B: $5x - y = 22$

2A – C: $7y = 21 \rightarrow y = 3$

$5x - 3 = 22 \rightarrow x = 5$

B: $3 . 5 - 4 . 3 + z = 10 \rightarrow z = 7$

Pravda, dílčí výpočty jsem trochu zkrátil, ale dostali jsme se ke stejnému výsledku. Řešení je tedy opět **[5;3;7]**. Není podstatné, který způsob řešení zvolíte, důležité je jeho správné použití.

Příklad 25:

A závěrem jedna slovní úloha, protože slovní úlohy má každý rád.

Aneta, Bára, Cyril a Dana byli nakupovat na svátky. V Kauflandu, abych tu měl také trochu nepovolené reklamy. Aneta koupila 20 deka šunky, 2 Coly a 10 rohlíků a celý nákup ji stál 150 Kč. Bára si vzala 30 deka šunky, jednu Colu a 20 rohlíků a platila 170 Kč. Cyril si odnesl půl kila šunky, 4 Coly a pět rohlíků a odcházel o 280 Kč lehčí. Kolik platila Dana za půl kila šunky, 3 Coly a 30 rohlíků?

Převedeme celý lidově formulovaný problém do jazyka matematiky.

s … cena 1 dkg šunky (fuj, taková zastaralá jednotka, ale fyziku už letos neučím)

c … cena 1 Coly

r … cena 1 rohlíku

A: $20s + 2c + 10r = 150$

B: $30s + c + 20r = 170 \quad \rightarrow \quad c = \mathbf{170 - 30s - 20r}$

C: $50s + 4c + 5r = 280$

A: $20s + 2 \,.\, (\mathbf{170 - 30s - 20r}) + 10r = 150 \quad \rightarrow \quad 20s + 340 - 60s - 40r + 10r = 150$

C: $50s + 4 \,.\, (\mathbf{170 - 30s - 20r}) + 5r = 280 \quad \rightarrow \quad 50s + 680 - 120s - 80r + 5r = 280$

A: $-40s - 30r = -190 \quad \rightarrow \quad 4s + 3r = 19$

C: $-70s - 75r = -400 \quad \rightarrow \quad 14s + 15r = 80$

5A – C: $6s = 15 \quad \rightarrow \quad \mathbf{s = 2{,}5}$

A: $4 \,.\, 2{,}5 + 3r = 19 \quad \rightarrow \quad 3r = 9 \quad \rightarrow \quad \mathbf{r = 3}$

$c = 170 - 30s - 20r = 170 - 30 \,.\, 2{,}5 - 20 \,.\, 3 = 170 - 75 - 60 = 35$

Deset deka šunky tedy stojí 25 Kč, Cola 35 Kč a rohlík 3 Kč. Dana bude platit

$5 \,.\, 25 + 3 \,.\, 35 + 30 \,.\, 3 = 125 + 105 + 90 =$ **320 Kč**.

Možná si někteří z vás všimli, že se to dalo počítat mnohem jednodušeji. Podíváte-li se pozorněji, zjistíte, že Dana nakoupila přesně tolik, co Aneta a Bára dohromady, takže stačilo sečíst 150 a 170. Takový drobný podraz, který mi moji žáci určitě odpustí. ☺

A to už je úplný konec. Snad jen několik příkladů na procvičení, aby z vás byli opravdoví mistři.

Příklad 26:

A: $3x - y + z = 10$

B: $2x + 2y - z = 9$

C: $x - 3y + 2z = 1$

Příklad 27:

A: $5x - 2y + z = 5$

B: $3x + 3y + 3z = 3$

C: $2x - 5y - 2z = 2$

Příklad 28:

A: $x + y + 2z = 21$

B: $6x + 2y - z = 2$

C: $4x + 3y - 2z = -1$

Výsledky pro kontrolu:

P26: [3;4;5], P27: [-2;-4;7], P28: [0;5;8]