Edice LIDOVÁ MATEMATIKA

Kombinatorika

Řada čtvrtého ročníku SŠ

Jiří Reichel

2021

Kombinatorika

Faktoriál

Faktoriál je základem celé kombinatoriky, která poskytuje nástroje například pro výpočty z oboru pravděpodobnosti a statistiky.

Faktoriál je součin té nejjednodušší aritmetické posloupnosti s členem $a_1 = 1$ a diferencí $d = 1$.

Označení faktoriálu … **faktoriál n** se označuje jako **n!**

Ukázky:

5! = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120
6! = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 = 720
7! = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 = 5040

Všimněte si, jak hodnota faktoriálu prudce roste. Obecně můžeme napsat:

n! = 1 . 2 . 3 . … . (n-2) . (n-1) . n

Z toho plyne například:

n! = n . (n-1)!
7! = 7 . 6!

Dohodou platí:

0! = 1

Kombinatorické funkce jsou definovány pouze pro nezáporná celá čísla.
Proto i jako symbol se zpravidla užívá písmeno n. Na kalkulačce je funkce pod tlačítkem n! nebo x!.

Faktoriál využíváme při hledání počtu možností.

Příklad 01: Na poličce máme 8 knih. Kolika způsoby je můžeme uspořádat?

8! = 40 320

Celkem existuje 40 320 způsobů uspořádání 8 knih na polici. Pokud člověk nemá zkušenosti s kombinatorikou, připadá mu to jako neuvěřitelné číslo.

Příklad 02: Na poličce (šetřím pomůckami) máme 3 knihy německé, 2 francouzské, 4 anglické a 6 českých. Celkem 15 knih. Kolika způsoby je můžeme uspořádat tak, aby knihy ve stejném jazyce stály vedle sebe?

Trochu těžší příklad s vábničkou k chybě … údaj o celkovém počtu knih nám není k ničemu. Počítáme:

počet možností v každé skupině: 3! . 2! . 4! . 6!
a ještě počet uspořádání skupin: 4!
takže výsledný počet možností je: 6 . 2 . 24 . 720 . 24 = 4 976 640

Pokud by knihy stejného jazyka nemusely stát vedle sebe, byl by počet možností

15! = 1 307 674 368 000, ale na to se nikdo neptal.

Odpověď na otázku v úloze … máme celkem **4 976 640** možností.

Faktoriál lze použít i v rovnicích (a také toho využiju v testech). Ukázka:

Příklad 03: Vypočtěte n

$(n + 1)! = 72(n - 1)!$	Upravíme podle faktoriálu s nejmenším základem (v tomto případě se jedná o (n – 1))
$(n + 1) . n . (n - 1)! = 72(n - 1)!$	Krátíme faktoriálem (n – 1)!
$n(n + 1) = 72$	Převedeme na kvadratickou rovnici. Ve většině případů lze řešit i jednodušeji (součin dvou sousedních celých čísel)
$n^2 + n - 72 = 0$	A kvadratickou rovnici umí každý (alespoň doufám).
$n_1 = 8,\ n_2 = -9$	

Hodnota -9 nesplňuje definiční obor faktoriálu. Proto je řešením číslo 8.

Dodatek:

Při testu, zda hodnota řešení spadá do definičního oboru, musíme výsledek dosadit do konkrétního příkladu. V našem příkladu tedy dosazujeme -9, resp. 8 do (n+1) a (n-1) a teprve pak testujeme správnost.

Variace

Někdy vybíráme pouze určitou část z celku a její počet možností. Pokud **záleží na pořadí** vybraných možností, jedná se o tzv. **variace**.

Výpočet variace bez opakování

$V_k(n)$ … variace k-té třídy z n prvků

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Příklad 04: Finále běhu na 100 metrů se zúčastní 8 běžců. Kolika možnostmi může dopadnout pořadí na stupních vítězů?

Protože záleží na tom, které místo na stupních vítězů atlet obsadí, jedná se o variace. Výpočet bude tedy:

$$\textbf{počet} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 336$$

Na kalkulačce najdeme tuto funkci pod tlačítkem nPr.

Člověk by očekával nVr, ale je tam P. Nejspíše proto, že si návrhář kdysi dávno zmýlil variace a permutace a stala se z toho norma, ale kdo ví?

Takže 8 *(počet všech atletů)* nPr 3 *(počet lidí na „bedně“)* = 336

Variace s opakováním

$V'_k(n) = n^k$

Jak vidíte, je to jednodušší. A výsledky jsou zpravidla mnohem větší.

Příklad 05:

Kolik trojciferných čísel můžeme vytvořit z číslic 1,2,5,8,9?

Počet číslic k dispozici … 5 (n)
Počet číslic v hledaném čísle … 3 (k)

$\mathbf{5^3 = 125}$

Kombinace

Podobná funkce jako variace, ale **nezáleží na pořadí** vybraných možností.

Výpočet kombinace bez opakování

$C_k(n)$ … kombinace k-té třídy z n prvků

$$C_k(n) = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$$

Příklad 06: Kvalifikace běhu na 100 metrů se zúčastní 8 běžců, do finále postupují první tři. Kolika možnostmi může dopadnout postup do finále?

Protože nezáleží na tom, jestli závodník postoupí z prvního, druhého nebo třetího místa, jedná se o kombinace. Výpočet bude tedy:

$$\text{počet} = \frac{8!}{3!.(8-3)!} = \frac{8!}{3!.5!} = 56$$

Na kalkulačce najdeme tuto funkci pod tlačítkem nCr.

Takže 8 *(počet všech atletů)* nCr 3 *(počet postupujících)* = 56

Kombinační číslo $C_k(n)$ lze také zapsat ve formě $\binom{n}{k}$

Čte se to „en nad ká“. Hlavně neplést se zlomkem.

Kombinace s opakováním

$$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k} = C_k(n+k-1)$$

Příklad 07:

V lékárně mají modré, zelené a žluté roušky. Potřebuju celkem 10 ks a je mi jedno, kolik bude kterých. Kolik mám možností nákupu? (n=10, k=3 druhy roušek → n+k-1 = 12)

$$\text{počet} = \frac{12!}{3!.(12-3)!} = \frac{12!}{3!.9!} = 220$$

Kdo nevěří, může si to zkusit rozepsat ☺.

Neřešené příklady:

Příklad 08: Při losování sportky se z celkového počtu 49 míčků táhne 6 míčků (prémiové číslo necháme bez povšimnutí). Kolik je různých možností tažených čísel?

Příklad 09: Ve třídě je 15 lavic po dvou židlích. Kolika způsoby se tam může rozsadit 6 studentů?

Příklad 10: Máme stejnou třídu a 8 identických sešitů. Kolika způsoby je lze rozdat, když na jednom místě (= u jedné židle) smí být nejvýše jeden sešit?

Příklad 11: Kolik čtyřmístných kódů můžeme složit ze znaků anglické abecedy (26 znaků) s tím, že první bude samohláska a poslední souhláska?

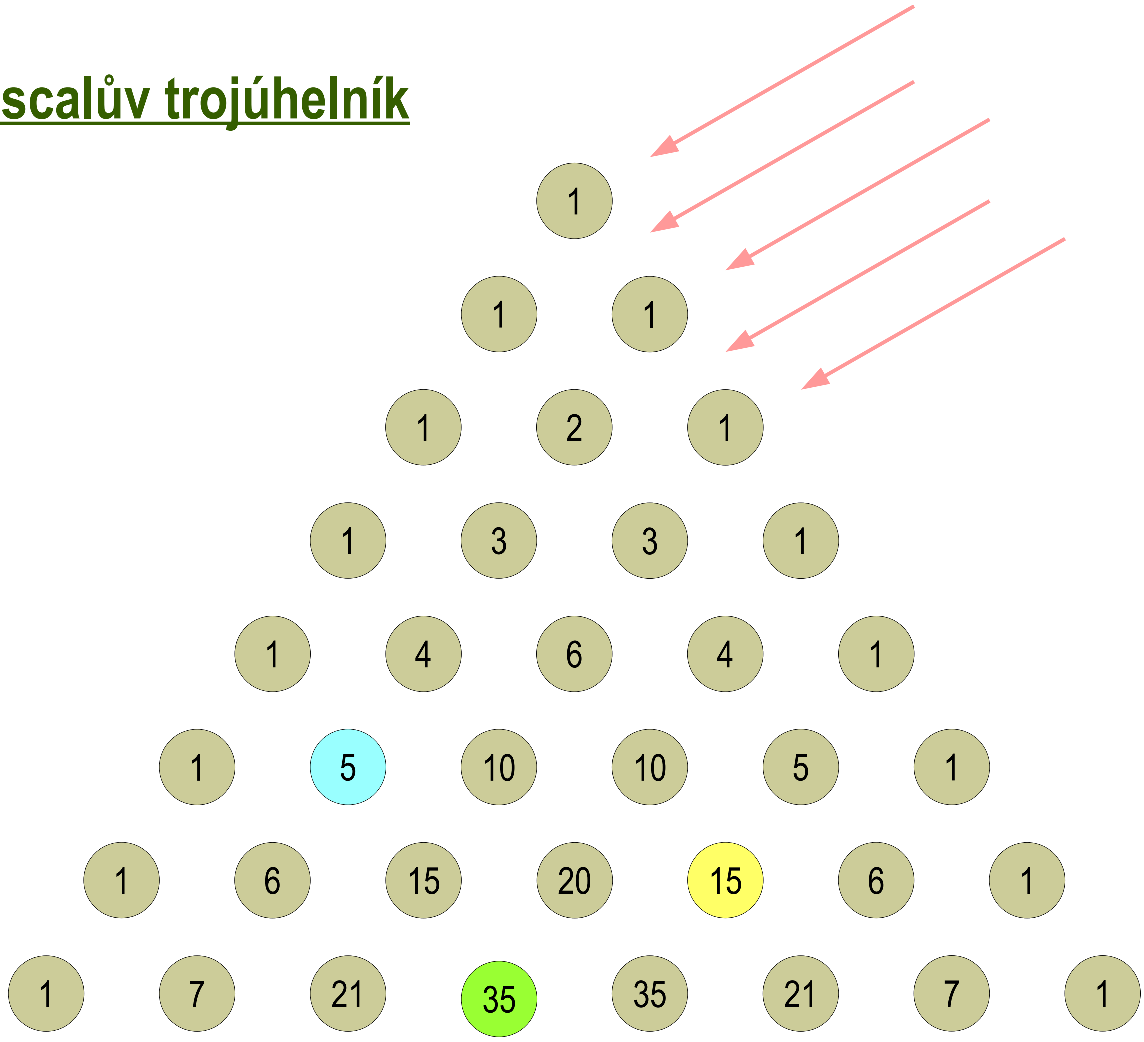
Příklad 12: Rada VOŠ se skládá z 9 členů. První ročník (celkem 26 studentů) dodá 2 členy, druhý ročník (32) se podílí 3 členy, třetí ročník (34) obsadí zbylé posty. Kolik je možností na sestavení rady VOŠ?

Příklad 13: Dvě studentky běžely o přestávce do nejmenovaného marketu, kde měly za úkol koupit všem spolužákům (celkem 12 ks) po jedné kaiserce. V nabídce byly jemné, celozrnné, se sezamem a s mákem. Dívky vzaly z regálů namátkou od každého druhu několik. Kolik je možností nákupu?

Příklad 14: Kolika způsoby můžeme vytáhnout 4 karty z balíčku pro canastu bez žolíků (celkem 104 karet), když se v balíčku každá karta 2x opakuje – jedná se o dvě stejné sady?

Tak počítejte a luštěte. Pokud někdo bude potřebovat písemnou či telefonickou konzultaci, vstupní poplatek je alespoň pokus o vyřešení všech těchto příkladů zaslaný na již známou adresu.

Pascalův trojúhelník



a tak dále až do nekonečna

Kromě okrajových jedniček vznikají všechna čísla v Pascalově trojúhelníku součtem dvojice čísel o řádek výše. A teď to nejzajímavější … Pascalův trojúhelník obsahuje kombinační čísla. První řádek má číslo 0 (nula), stejně tak i první číslo v řádku. Řádek určuje počet všech prvků ve skupině (n), pozice v řádku je počet vybíraných prvků (k).Takže například číslo 5 v modrém kroužku je kombinační číslo $C_1(5)$, 15 ve žlutém kroužku představuje $C_4(6)$ a 35 v zeleném kroužku je hodnota $C_3(7)$.

Všimněte si, že trojúhelník je souměrný podle svislé osy. Z toho faktu vyplývá následující tvrzení:

$$\mathbf{C_k(n) = C_{n-k}(n)}$$

a dále

$$\mathbf{C_{k+1}(n+1) = C_k(n)+C_{k+1}(n)}$$

Tyto vzorce občas použijeme, aby tu nebyly napsány jen tak zbůhdarma.

Další vlastností Pascalova trojúhelníku je, že součet řádku číslo n je 2^n. Zajímavé, že. A to ještě není všechno.

Pokud budeme sčítat hodnoty v Pascalově trojúhelníku ve směru podle naznačených růžových šipek, vyjdou nám hodnoty 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; … Jsou to hodnoty tzv. Fibonacciho posloupnosti, která je využívána v celé řadě matematických modelů i pro výpočet zlatého řezu.

A aby toho nebylo málo, všiml jsem si, že čísla 1; 11; 121; 1331; 14641, což jsou řádky 0 až 4, jsou mocniny 11^0; 11^1; 11^2; 11^3; 11^4. Nikde v knihách jsem to nenašel a dělám si na to nárok. Reichelovo pravidlo ☺

Využití Pascalova trojúhelníku si předvedeme v následujícím tématu, kterým je Binomická věta.

Výsledky příkladů z minulého tématu:

Řešení 08: $C_6(49) = 13\,983\,816$

Řešení 09: $V_6(30) = 427\,518\,000$

Řešení 10: $C_8(30) = 5\,852\,925$

Řešení 11: $6 . 26 . 26 . 20 = 81\,120$

Řešení 12: $C_2(26) . C_3(32) . C_4(34) = 74\,758\,112\,000$

Řešení 13: $C_4(12+4-1) = C_4(15) = 1365$

Řešení 14: 338 351 Zkuste najít vzorec (pro přeborníky)

Binomická věta

Název je možná složitější, než samotné téma. Binom = dvojčlen. Trochu zabrousíme do historie. Kdysi dávno, když po zeměkouli ještě létali špačci, jste se na základní škole při hodinách matematiky učili vzorec o druhé mocnině dvojčlenu.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Někde se lidé zabývali i třetí mocninou:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Binomická věta nám ukáže, jak umocnit takový dvojčlen libovolným přirozeným exponentem. Vrátíme se k Pascalovu trojúhelníku. Jeho řádky jdou po sobě následovně:

1
1; 1
1; 2; 1
1; 3; 3; 1
1; 4; 6; 4; 1 a tak dále

a mocniny dvojčlenu vypadají takto:

$(a+b)^0 = \mathbf{1}a^0b^0 = 1$
$(a+b)^1 = \mathbf{1}a^1b^0 + \mathbf{1}a^0b^1 = a+b$
$(a+b)^2 = \mathbf{1}a^2b^0 + \mathbf{2}a^1b^1 + \mathbf{1}a^0b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a+b)^3 = \mathbf{1}a^3b^0 + \mathbf{3}a^2b^1 + \mathbf{3}a^1b^2 + \mathbf{1}a^0b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Určitě jste si toho všichni všimli. Koeficienty v jednotlivých členech výsledku odpovídají kombinačním číslům v Pascalově trojúhelníku. A dostáváme se k definici binomické věty

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i(n)a^{n-i}b^i$$

Také vám ten vzorec připadá krásný?

Znak $\sum$ znamená součet, i je pořadí členu od nuly po n, a a b jsou nenulové hodnoty, $a^0 = b^0 = 1$, $a^1 = a$, $b^1 = b$

A můžeme hrdě prohlásit, že umíme umocnit dvojčlen libovolným (skoro) mocnitelem.

Tak například 7. člen binomického rozvoje $(x-2y)^{16}$ je *(pozor, 7. člen … i = 6, protože začíná nulou)*

$C_6(16) \,.\, x^{16-6} \,.\, (-2y)^6 = 8008\, x^{10}\, 64\, y^6 = 512512\, x^{10}y^6$

Jednoduché, viďte. Na první pohled. Kombinatorika je ve skutečnosti velmi rozsáhlý matematický obor, který poskytuje mocné nástroje dalším odvětvím matematiky, zejména pak počtu pravděpodobnosti. Zatím jsme jen nahlédli „letmo pod pokličku“.