Edice LIDOVÁ MATEMATIKA

Goniometrie a trigonometrie 2

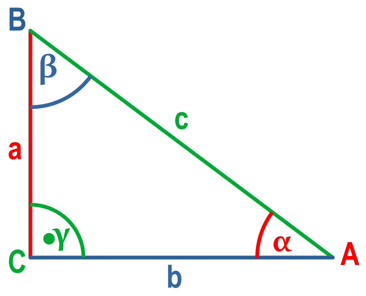
Praktické výpočty

Řada třetího ročníku SŠ

Jiří Reichel

2022

Goniometrické výpočty

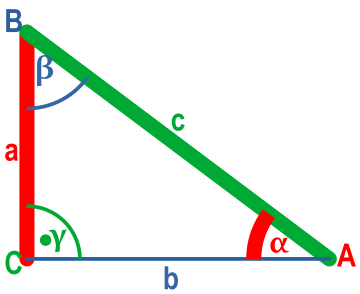


Pravoúhlý trojúhelník

Vrcholy A, B, C
Strany a, b, c jsou naproti vrcholům
Odvěsny a, b svírají pravý úhel, součet všech úhlů je 180°
Přepona c je naproti pravému úhlu
Ostré úhly jsou α u vrcholu A a β u vrcholu B
γ je pravý úhel (90°) u vrcholu C

Pythagorova věta: $a^2 + b^2 = c^2$

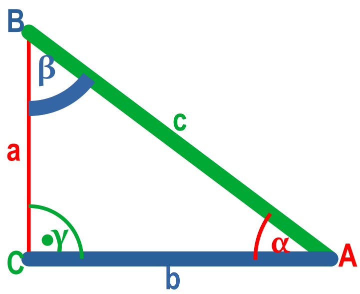
Pokud nejde použít Pythagorova věta (nemáme vhodné údaje), použijeme goniometrické funkce. Pro výpočty velikostí úhlů **vždy** použijeme goniometrické funkce. Pythagorova věta má jediné použití – trojúhelník je pravoúhlý, známe délky dvou stran a počítáme délku třetí strany. Mezivýsledky budu pro názornost zaokrouhlovat (nedělá se to, je to ve skutečnosti chyba, zvětšuje se tím nepřesnost výpočtu).



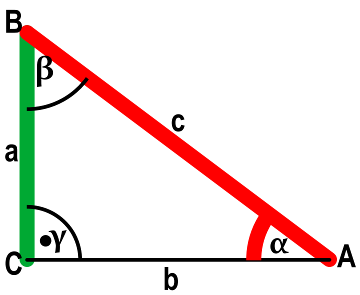
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Goniometrie, funkce sinus:

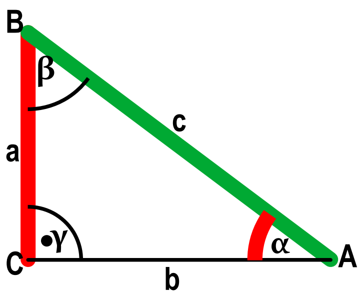
Funkce sinus je poměr mezi protilehlou odvěsnou a přeponou. Výpočtů se zúčastní silně zobrazené části trojúhelníka. Protilehlá odvěsna leží naproti použitému úhlu. Na dalších příkladech červené údaje známe a zelené počítáme. Poznámka: funkce **arcsin** je na kalkulačce jako **sin**$^{-1}$.



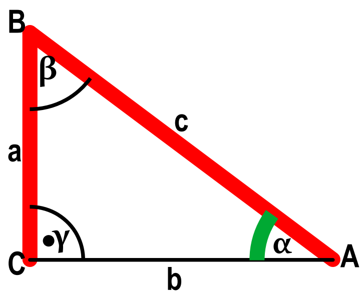
$$\sin\beta = \frac{b}{c}$$



$$a = c\,.\sin\alpha$$



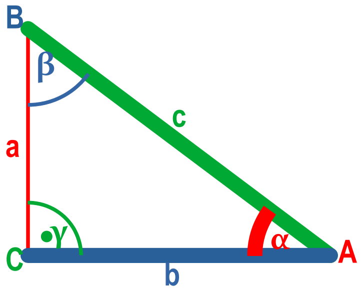
$$c = \frac{a}{\sin\alpha}$$



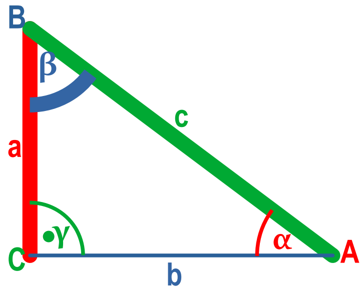
$$\alpha = \arcsin\frac{a}{c}$$

Goniometrie, funkce cosinus:

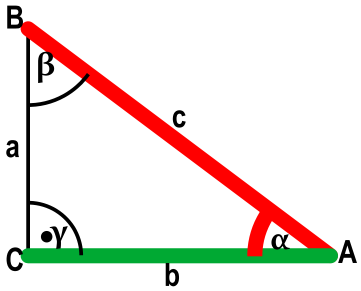
Funkce cosinus je poměr mezi přilehlou odvěsnou a přeponou. Výpočtů se zúčastní silně zobrazené části trojúhelníka. Přilehlá odvěsna leží vedle použitého úhlu. Na dalších příkladech červené údaje známe a zelené počítáme. Poznámka: funkce **arccos** je na kalkulačce jako **cos**$^{-1}$.



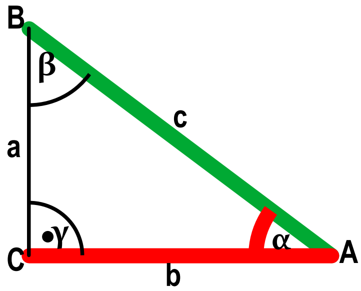
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$



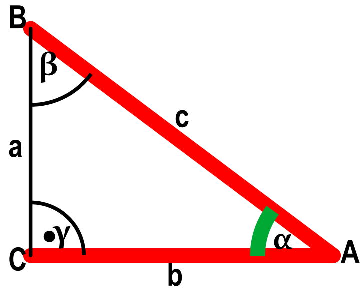
$$\cos\beta = \frac{a}{c}$$



$$b = c\,.\cos\alpha$$



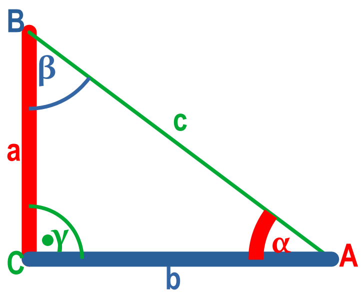
$$c = \frac{b}{\cos\alpha}$$



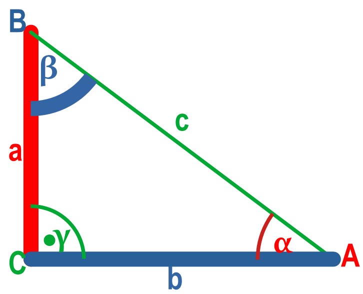
$$\alpha = \arccos\frac{b}{c}$$

Goniometrie, funkce tangens a cotangens:

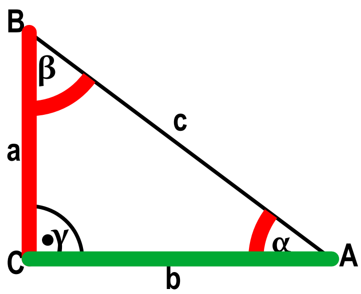
Funkce tangens je poměr mezi protilehlou a přilehlou odvěsnou. Cotangens je funkce opačná. Přepona (ta zelená) se ve funkcích tangens a cotangens vůbec nevyskytuje. Výpočtů se zúčastní silně zobrazené části trojúhelníka. Přilehlá odvěsna leží vedle použitého úhlu. Na dalších příkladech červené údaje známe a zelené počítáme. Poznámka: funkce **arctg** je na kalkulačce jako **tan**$^{-1}$ a u funkce **arccotg** je to podobné.



$$tg\,\alpha = \frac{a}{b} \qquad cotg\,\alpha = \frac{b}{a}$$

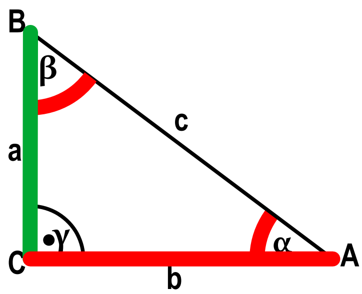


$$tg\,\beta = \frac{b}{a} \qquad cotg\,\beta = \frac{a}{b}$$



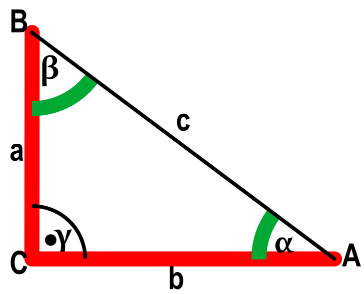
$$b = \frac{a}{tg\,\alpha} \qquad b = \frac{a}{cotg\,\beta}$$

$$b = a\,.tg\,\beta \qquad b = a\,.cotg\,\alpha$$



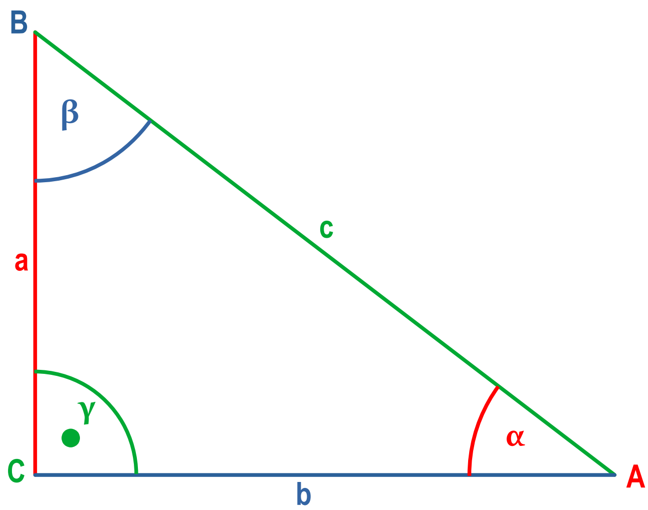
$$a = \frac{b}{tg\,\beta} \qquad a = \frac{b}{cotg\,\alpha}$$

$$a = b\,.tg\,\alpha \qquad a = b\,.cotg\,\beta$$



$$\alpha = arctg\frac{a}{b} \qquad \alpha = arccotg\frac{b}{a}$$

$$\beta = arctg\frac{b}{a} \qquad \beta = arccotg\frac{a}{b}$$



Praktický příklad 1:

Na stromě vysokém **10 metrů** (odvěsna **a**) sedí veverka (vrchol **B**). Na zemi pod stromem leží ořech (vrchol **A**). Veverka vidí ořech pod úhlem **40°** (úhel **α**). Za úhel sklonu se zpravidla počítá odchylka od vodorovné roviny, takže ne úhel **β**.

1) Jaká je vzdálenost veverky od ořechu (délka přepony **c**)?
2) Jak daleko je ořech od paty stromu (vrchol **C**) (délka odvěsny **b**)?

Řešení 1:

1) Počítáme přeponu, známe odvěsnu a protilehlý úhel, proto bude použita funkce sinus.

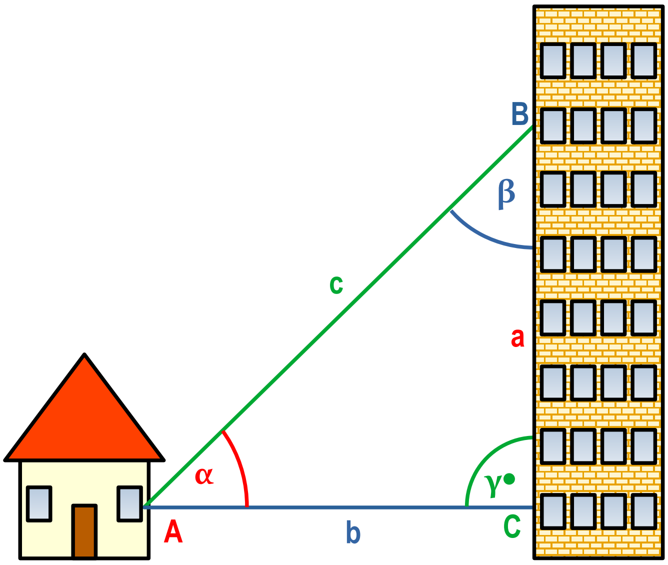
$$\sin\alpha=\frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad c=\frac{a}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad c=\frac{10}{\sin 40°}$$

Vložíme do kalkulačky a odpověď: **<u>Veverka je od ořechu vzdálena 15,56 m.</u>**

2) Počítáme odvěsnu, známe odvěsnu a protilehlý úhel, proto bude použita funkce tangens.

$$tg\,\alpha=\frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad b=\frac{a}{tg\,\alpha} \quad \Rightarrow \quad b=\frac{10}{tg\,40°}$$

Vložíme do kalkulačky a odpověď: **<u>Ořech je od paty stromu vzdálen 11,92 m.</u>**



Praktický příklad 2:

V domku bydlí Tomáš, v bytovce bydlí Jan. Okno Tomášova pokoje je 2 metry nad zemí (vrchol **A**). Oba chlapci mají v pokojích počítače, které spojili síťovým kabelem. Vzdálenost domů je 18 metrů a Janovo okno (vrchol **B**) je ve výšce 20 metrů.

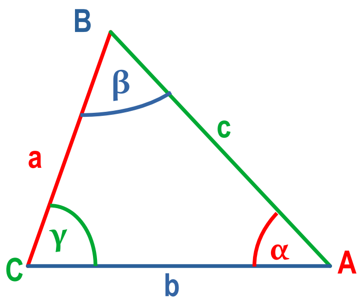
1) Pod jakým úhlem vede kabel od Tomáše k Janovi (úhel **α**)?
2) Jaká je vzdálenost Tomášova a Janova okna (délka přepony **c**)?

Řešení 2:

1) Jednoduchým výpočtem zjistíme, že **a** = **b** (20-2 = 18). Pokud jsou odvěsny stejně dlouhé, je trojúhelník rovnoramenný a oba úhly jsou shodné, tj. **<u>45°</u>**.

2) Zde nám stačí Pythagorova věta. $c^2 = a^2 + b^2$.Vložíme do kalkulačky a odpověď: **<u>Vzdálenost oken je 25,46 m.</u>**

Trigonometrické výpočty

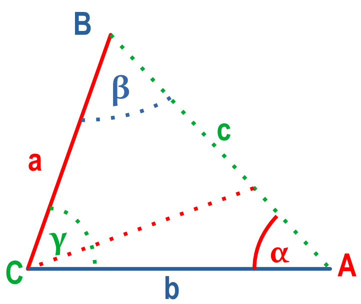


Obecný trojúhelník
Vrcholy **A**, **B**, **C**
Strany **a**, **b**, **c** jsou naproti vrcholům
Součet všech úhlů je 180°
Úhly jsou **α** u vrcholu **A**, **β** u vrcholu **B**, **γ** u vrcholu **C**

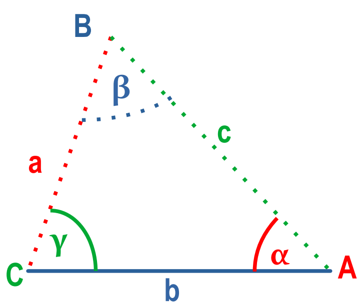
Pro trigonometrické výpočty (výpočty v obecném trojúhelníku) používáme zejména dva vzorce (trigonometrický a Héronův) a dvě věty (sinovou a cosinovou).
Sinovou a cosinovou větu používáme, když hledáme zbývající strany nebo úhly v trojúhelníku, vzorce slouží k výpočtu obsahu trojúhelníku. Musíme znát tři hodnoty, ale tři úhly nestačí.

Sinová věta $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$ nebo $\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$

Poměr strany trojúhelníku a sinu protilehlého úhlu je v daném trojúhelníku konstantní.
Sinovou větu pro výpočet použijeme, když známe nebo můžeme snadno dopočítat 3 údaje o trojúhelníku, z toho jednu stranu a protilehlý úhel. Na následujících příkladech známe vše, co je plnou čarou. Tečkované dopočítáme. Věty **usu** a **Ssu** (Internet, znalosti ZŠ).



Známe strany **a**, **b** a úhel **α**. Strana **a** nesmí být kratší než strana **b**, jinak by vznikla 2 řešení (tečkovaná červená). Pro výpočet využijeme poměr mezi **a** a sin **α**. Dopočítáme **β**, **γ**=180°-**α**-**β** a následně spočítáme stranu **c**. Při nevhodně zvolených hodnotách se může stát, že úloha nebude mít řešení (strana **a** na stranu **c** „nedosáhne“).



Známe stranu **b** a úhly **α** a **γ**. Dopočítáme **β**, **β**=180°-**α**-**γ**. Pro další výpočty využijeme poměr mezi **b** a sin **β**.

Praktický příklad 3:

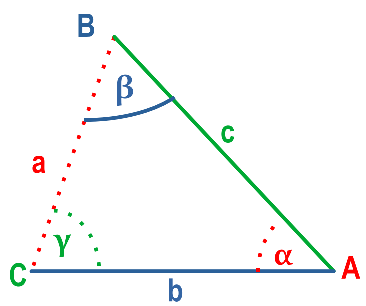
a = 7 cm, **b** = 5 cm, **α** = 70°

$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b} \rightarrow \sin\beta=\frac{b.\sin\alpha}{a}$ $\quad \beta=\arcsin\frac{5.\sin 70°}{7}=\underline{42°10'}$

$\gamma=180°-42°10'-70°=\underline{67°50'}$

$\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{a}{\sin\alpha} \rightarrow c=\frac{a.\sin\gamma}{\sin\alpha}=\frac{7.\sin 67°50'}{\sin 70°}=6{,}8986\,cm\approx\underline{6{,}9\,cm}$

A máme všechny úhly i strany.



Toto je pouze otočená první varianta.

Cosinová věta

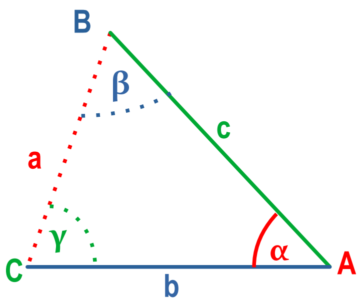
Cosinová věta v základním tvaru je červeně zvýrazněna. Ostatní vzorce jsem odvodil, abych vám ušetřil práci. Není zač. Cosinovou větu použijeme, když známe dvě strany a úhel mezi nimi nebo pouze tři strany a nic jiného. Na následujících příkladech známe vše, co je plnou čarou. Tečkované dopočítáme.

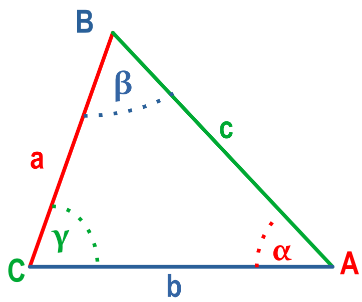
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\cos\alpha \rightarrow \alpha = \arccos\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \,.\cos\beta \rightarrow \beta = \arccos\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \,.\cos\gamma \rightarrow \gamma = \arccos\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Věty **sus** a **sss** (Internet, znalosti ZŠ).





Praktický příklad 4:

V trojúhelníku ABC jsou dány strany
b = 8 cm, **c** = 9 cm a úhel **α** = 50°.

Jaké velikosti mají ostatní strany a úhly?

Řešení 4:

1) Strana **a**

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\cos\alpha}$$

$$a^2 = 8^2 + 9^2 - 2.8.9.\cos 50\,°$$

Kalkulačka → **a = 7,24 cm**

2) Úhel **β**

$$\boxed{\beta = \arccos\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}$$

$$\beta = \arccos\frac{7{,}24^2 + 9^2 - 8^2}{2\ .\ 7{,}24\ .\ 9}$$

Kalkulačka → **β = 57°49‘**

3) Úhel **γ**
γ = 180°- **α** - **β** = **72°11‘**

Praktický příklad 5:

V trojúhelníku ABC jsou dány strany
a = 10 cm, **b** = 6 cm a **c** = 5 cm .

Jaké velikosti mají úhly?

Řešení 5:

1) Úhel **α**

$$\alpha = \arccos\frac{5^2 + 6^2 - 10^2}{2\ .\ 6\ .\ 5}$$

Kalkulačka → **α = 130°32‘**

2) Úhel **β**

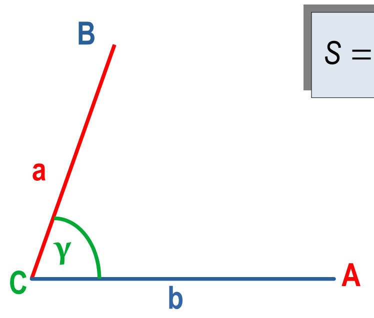
$$\beta = \arccos\frac{5^2 + 10^2 - 6^2}{2\ .\ 10\ .\ 5}$$

Kalkulačka → **β = 27°08‘**

3) Úhel **γ**
γ = 180°- **α** - **β** = **22°20‘**

Trigonometrický vzorec

Využívá se k výpočtu obsahu trojúhelníku, pokud známe délku dvou stran a úhlu mezi nimi. Prakticky lze tento vzorec použít například v geometrických plánech a podobně.



$$S = \frac{1}{2} ab \,.\, \sin \gamma$$

Praktický příklad 6:

V trojúhelníku ABC jsou dány strany
b = 8 cm, **c** = 9 cm a úhel α = 50°.

Jaký je jeho obsah?

Řešení 6:

$$S = \frac{1}{2} .8.9.\sin 50°$$

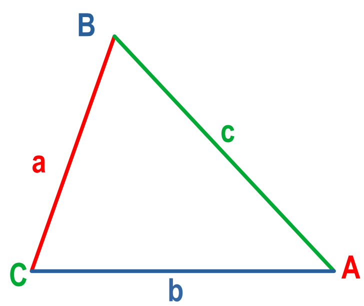
Kalkulačka → **S = 27,58 cm²**

Héronův vzorec

Využívá se k výpočtu obsahu trojúhelníku, pokud známe délku všech tří stran a ničeho jiného. Dá se použít například na zahradě, protože změřit vzdálenost je jednoduché, zatímco na měření úhlů je třeba speciální zařízení.

$$t = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S = \sqrt{t.(t-a).(t-b).(t-c)}$$



Praktický příklad 7:

V trojúhelníku ABC jsou dány strany
a = 10 cm, **b** = 6 cm a **c** = 5 cm .

Jaký je jeho obsah?

Řešení 7:

$$t = \frac{10+6+5}{2} = 10{,}5$$

$$S = \sqrt{10{,}5.(10{,}5-10).(10{,}5-6).(10{,}5-5)}$$

Kalkulačka → **S = 11,399 cm²**

Před usnutím

Máte za sebou opravdu jednoduchý základ využití goniometrie a trigonometrie.

Pokud jsou tyto výpočty nad vaše síly, přihlašte se na kroužek vyšší geometrie, který probíhá každou středu od 13:45 do 14:30 přesně. Pokud se přihlásíte, očekávám pravidelnou účast alespoň po dobu 4 měsíců.