

Edice LIDOVÁ MATEMATIKA

Kvadratická funkce

Řada druhého ročníku SŠ

Jiří Reichel

2021

Matematika

Kvadratická funkce

Kvadratická ... někde v předpisu se vyskytuje kvadrát = 2. mocnina.

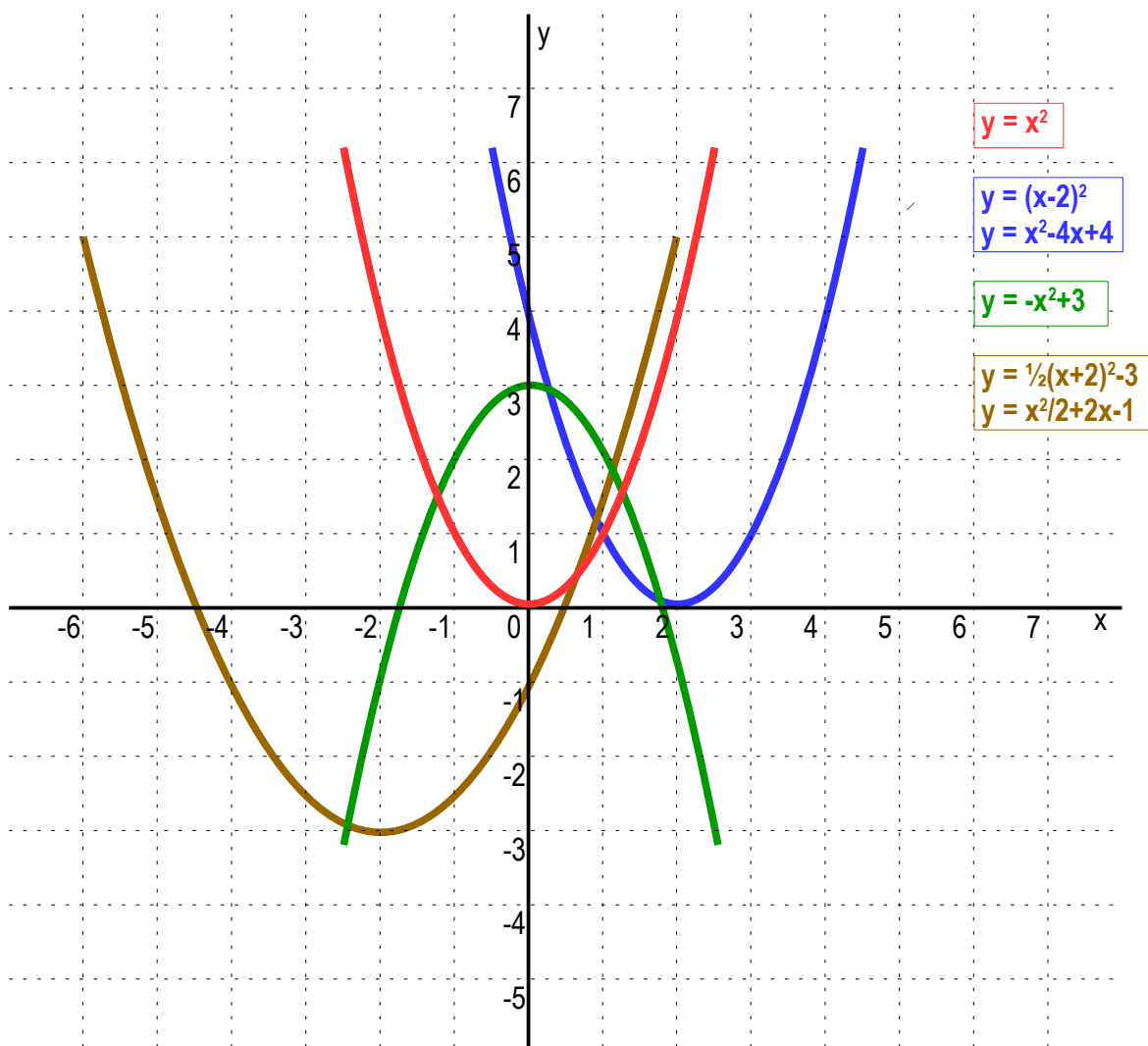
$$y = ax^2 + bx + c$$

a, b a c jsou parametry (konkrétní čísla)

Grafem kvadratické funkce je parabola.

Pro určení předpisu kvadratické funkce jsou potřeba 3 body, které neleží na jedné přímce.

Průsečíky s osou x jsou řešením kvadratické rovnice $f(x) = 0$



Graf kvadratické funkce je osově souměrný podle svislé osy. V místě, kde se průběh mění z funkce klesající na funkci rostoucí nebo naopak, je tzv. **vrchol paraboly**.

Čím vyšší je absolutní hodnota parametru **a**, tím více se ramena paraboly svírají (parabola je „špičatější“). Obě tvrzení jsou zřejmá z obrázku na předchozí stránce.

Abychom mohli z rovnice paraboly zjistit její vrchol, je potřeba upravit její tvar. Ukážeme si to na příkladu. Využijeme přitom známý vzorec $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Příklad 1:

Najděte vrchol paraboly $y = x^2 + 6x + 3$.

Řešení:

$$x^2 + 6x + 3 \rightarrow a^2 + 2ab + b^2 + c$$

Z toho vyplývá:

$$a = x$$

$$2ab = 6x \rightarrow 2xb = 6x \rightarrow 2b = 6$$

$$b = 3$$

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$x^2 + 6x + 3 = x^2 + 6x + 9 + c$$

$$c = -6$$

$$x^2 + 6x + 3 = (x+3)^2 - 6$$

Vrchol paraboly je v bodu $V[-3; -6]$.

Příklady k procvičení:

Najděte vrchol paraboly:

a) $y = x^2 - 2x + 3$ $V[1; 2]$

b) $y = x^2 + 8x + 15$ $V[-4; -1]$

c) $y = x^2 - 6x + 10$ $V[3; 1]$

d) $y = x^2 - 10x + 25$ $V[5; 0]$

Jednodušší, nematematický přístup

Rovnice je $x^2 + 6x + 3$

Hledaný dvojčlen získáme takto:

- z x^2 odstraníme dvojku, zbyde x

- z $6x$ odstraníme x a vydělíme 2, zbydou 3 a máme dvojčlen $(x+3)$

Příklad 2:

Máme body A[-2;-1], B[-1;-2], C[2;7]. Zjistěte předpis kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$
Vytvoříme rovnici pro každý bod, dosadíme x a y .

$$A: -1 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c$$

$$B: -2 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c$$

$$C: 7 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$$

Rovnice upravíme do obvyklého tvaru:

$$A: 4a - 2b + c = -1$$

$$B: a - b + c = -2 \quad \rightarrow \quad c = b - a - 2 \text{ a dosadíme}$$

$$C: 4a + 2b + c = 7$$

$$A: 4a - 2b + b - a - 2 = -1 \quad \rightarrow \quad 3a - b = 1$$

$$C: 4a + 2b + b - a - 2 = 7 \quad \rightarrow \quad 3a + 3b = 9$$

$$C-A: 4b = 8 \quad | :4$$

$$b = 2$$

Dosadíme do rovnice A:

$$A: 3a - 2 = 1 \quad | +2$$

$$3a = 3 \quad | :3$$

$$a = 1$$

$$c = b - a - 2 = 2 - 1 - 2 = -1$$

Výsledná rovnice:

$$\underline{y = x^2 + 2x - 1}$$

Příklad 3:

Máme body A[-5;0], B[-3;-12], C[-2;-9]. Zjistěte předpis kvadratické fce $y = ax^2 + bx + c$
Vytvoříme rovnici pro každý bod, dosadíme x a y .

$$A: 0 = a(-5)^2 + b(-5) + c \quad \rightarrow \quad 25a - 5b + c = 0$$

$$B: -12 = a(-3)^2 + b(-3) + c \quad \rightarrow \quad 9a - 3b + c = -12$$

$$C: -9 = a(-2)^2 + b(-2) + c \quad \rightarrow \quad 4a - 2b + c = -9$$

$$C: c = -4a + 2b - 9 \quad \text{dosadíme } c \text{ do rovnic A: a B:}$$

$$A: 25a - 5b - 4a + 2b - 9 = 0 \quad \rightarrow \quad 21a - 3b = 9 \quad | :3$$

$$B: 9a - 3b - 4a + 2b - 9 = -12 \quad \rightarrow \quad 5a - b = -3$$

$$A: 7a - b = 3$$

$$A-B: 2a = 6 \quad | :2$$

$$a = 3$$

$$B: 5 \cdot 3 - b = -3 \quad | -15$$

$$-b = -18$$

$$b = 18$$

$$c = -4a + 2b - 9 = -12 + 36 - 9 = 15$$

Výsledek:

$$\underline{y = 3x^2 + 18x + 15}$$

Příklady k procvičení:

Najděte předpis kvadratické funkce, jejíž graf prochází body:

- a) A[1;1], B[2;0], C[4;4] $y = x^2 - 4x + 4$
- b) A[3;-10], B[5;-18], C[6;-16] $y = 2x^2 - 20x + 32$
- c) A[-5;10], B[-1;2], C[1;4] $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 2,5$
- d) A[5;1], B[7;1], C[8;-2] $y = -x^2 + 12x - 34$
- e) A[-1;0], B[0;5], C[2;-15] $y = -5x^2 + 5$
- f) A[-10;1], B[0;0], C[10;1] $y = 0,01x^2$
- g) A[-4;1], B[-1;4], C[2;1] $y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$
- h) A[-11;121], B[0;0], C[14;196] $y = x^2$
- i) A[4;4], B[1;1], C[2;0] $y = x^2 - 4x + 4$